ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерной инженерии

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО КУРСУ
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

для студентов направления подготовки
«Компьютерная инженерия»
специальностей
7.091501: "Компьютерные системы и сети"
7.091502: ”Системное программирование”

Донецк, 2013

УДК 681.973

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА» (для студентов направления подготовки 6.0915 «Компьютерная инженерия», специальностей 7.091501 - "Компьютерные системы и сети" и 7.091502 - "Системное программирование").

Составитель: Чередникова О.Ю. – Донецк: ДВНЗ «Донецкий национальный технический университет», 2013 г. – 40 с.

Целью методических указаний по курсу «Дискретная математика» является приобретение студентами практических навыков решения задач теории множеств и теории графов, в частности, доказательства тождеств с помощью законов алгебры множеств, решение комбинаторных задач и задач, решаемых с помощью графов.

Методические указания содержат варианты заданий, примеры выполнения лабораторных работ, а также необходимый пояснительный материал.

Составитель:

к.т.н., доцент каф. КИ Чередникова О.Ю.

Ответственный за выпуск:

д.т.н., профессор Святный В.А.

Рецензенты:

к.т.н., доцент каф. КИ Краснокутский В.А.

к.т.н., доцент каф. АСУ Фонотов А.М.

Содержание

Введение

Целью лабораторных работ по курсу «Дискретная математика» является приобретение студентами практических навыков решения задач теории множеств и теории графов. Данные методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Компьютерная инженерия» специальностей «Компьютерные системы и сети» и «Системное программирование».

Материал, излагаемый в методических указаниям, содержит теоретические сведения по вопросам доказательства тождеств с помощью законов алгебры множеств, изучения свойств отношений и, в частности, функциональных отношений, решения комбинаторных задач, а также задач теории графов.

С целью закрепления материала предлагаются варианты для индивидуального выполнения задания студентами. Материал разбит на две части – два модуля: теория множеств и теория графов. В конце каждой части находятся вопросы для проверки знаний по соответствующему модулю.

Лабораторная работа №1. Операции над множествами

Цель: Освоить основные операции над множествами.
Тема: Операции над множествами

Задание 1 Задание 2 Задание 3

Теоретические сведения

Понятию множества нельзя дать строгого определения. Более общего понятия, чем множество в математике не существует. Это - "совокупность, собрание, класс, семейство". Часто множество - несколько объектов, объединенных общим признаком.

Предметы, составляющие множество, называются элементами. Для указания того, что множество A состоит из элементов x, y ...z пишут A={ x,y.... }. Например: множество арифметических действий состоит из элементов {сложения, вычитания, умножения, деления}. То, что элемент x принадлежит множеству A, записывают $x \in A$. Если не принадлежит $\Rightarrow$ $x \notin A$.

Например: если A - множество натуральных чисел, то $6 \in A$, а вот $1.3 \notin A$.

Операции над множествами

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B. (Обозначение $A \cup B=\{x / x \in A$ или $x \in B\}$)

Пусть A={ 1,2,3 }; B={ 1,2,4,5 }; $A \cup B$={ 1,2,3,4,5 }.

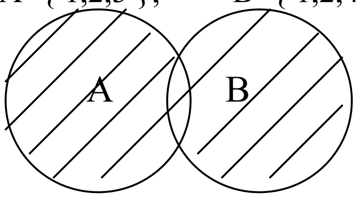


Диаграмма Венна (круги Эйлера) для $A \cup B$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит одновременно A и B (обозначается $A \cap B=\{x / x \in A$ и $x \in B\}$).

Пусть A={ 1,2,3 }; B={1,2,4,5}; $A \cap B$={ 1,2 }.

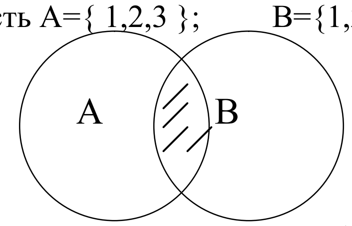


Диаграмма Венна (круги Эйлера) для $A \cap B$

Разностью двух множеств A и B (относительным дополнением), называется новое множество A-B или A/B в которое входят все элементы множества A не принадлежащие B. $A - B = \{x / x \in A$ и $x \notin B\}$. Совсем не обязательно, чтобы множество A было частью множества B.

Пример: A={1,2,3,4} B={1,3,5} A-B={2,4} B-A={5}

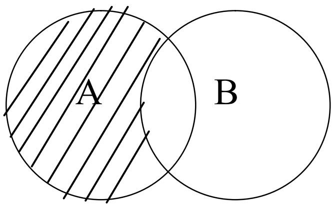


Диаграмма Венна (круги Эйлера) для A - B

Симметрической разностью двух множеств A и B, называется новое множество $A\Delta B$, в которое входят все элементы множества A-B или B-A.

$A\Delta B = \{x / (x \in A$ и $x \notin B)$или$(x \in B$ и $x \notin A)\}$.

Пример: A={1,2,3,4} B={1,3,5} $A\Delta B$={2,4,5}

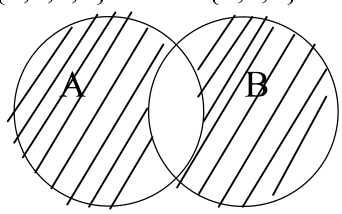


Диаграмма Венна (круги Эйлера) для $A \Delta B$

Задание 1

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, заданные характеристическим свойством. Изобразите в системе координат xOy множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле δ.

<u>Варианты заданий:</u>

№	Условия		№	Условия	
1	**A**	$x^2+y^2-6y\le 0$	2	**A**	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$
	B	$y+x^2+1\ge 0$		**B**	$y^2+x^2-25\le 0$
	C	$\lvert x\rvert\le 6;\ -3\le y\le -2$		**C**	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$
3	**A**	$0\le y\le \sqrt{x}$	4	**A**	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	B	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le -2$		**B**	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 5$
	C	$x^2+y^2-18x\le 0$		**C**	$y^2+x^2-16\le 0$
	δ	$(A\cup B)\setminus C$		**δ**	$A\cup B\cup C$
5	**A**	$y-x^2-1\le 0$	6	**A**	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$
	B	$y-x^2+3\ge 0$		**B**	$y+\dfrac{4}{x}\ge 0$
	C	$x>0$		**C**	$y^2+x^2-25\le 0$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$
7	**A**	$x^2+y^2-4x\le 0$	8	**A**	$y-x^4-1\le 0$
	B	$x^2+y^2+4x\le 0$		**B**	$0\le y\le \sqrt{x}$
	C	$\lvert x\rvert\le 2;\quad \lvert y\rvert\le 2$		**C**	$x^2+y^2-4x\le 0$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		**δ**	$(A\cap B)\Delta C$
9	**A**	$y+x^2-5\le 0$	10	**A**	$y^2+x^2-9\le 0$
	B	$x^2+y^2-6y\le 0$		**B**	$\lvert y\rvert\le 4;\qquad -6\le x\le 1$
	C	$x>0$		**C**	$y<0$
	δ	$A\setminus(B\cup C)$		**δ**	$(A\Delta B)\setminus C$
11	**A**	$x-y>0$	12	**A**	$y+x^2-6\le 0$
	B	$x+y<0$		**B**	$\lvert x\rvert>2;\quad \lvert y\rvert>2$
	C	$x^2+y^2\le 4$		**C**	$x<y$
	δ	$(A\Delta B)\cup C$		**δ**	$A\cap B\cap C$
13	**A**	$y\le \sin x$	14	**A**	$x<y+3$
	B	$y>0{,}5$		**B**	$x>y-3$
	C	$y>-2$		**C**	$\lvert x\rvert<5;\quad \lvert y\rvert<2$
	δ	$(A\Delta B)\cap C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$

15	**A**	$y-\frac{5}{x}\le 0$	**16**	**A**	$x^2+y^2+6y\le 0$
	B	$y+\frac{2}{x}\ge 0$		**B**	$y+x^2+1\ge 0$
	C	$y\ge 1$		**C**	$\lvert x\rvert\le 4;\quad -4\le y\le -2$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		**δ**	$A\cap(B\setminus C)$
17	**A**	$x^2+y^2-25\le 0$	**18**	**A**	$0\le y\le\sqrt{x}$
	B	$y-\frac{4}{x}\le 0$		**B**	$x^2-y+4\ge 0$
	C	$x^2+y^2\le 16$		**C**	$y>1$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$
19	**A**	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 1$	**20**	**A**	$\mathrm{x}^2-y-2\ge 0$
	B	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 5$		**B**	$x^2-y+4\ge 0$
	C	$x^2+y^2\le 16$		**C**	$y>1$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$
21	**A**	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 5$	**22**	**A**	$y+x^2-5\le 0$
	B	$y+\frac{4}{x}\ge 4$		**B**	$x^2+y^2+6y\le 0$
	C	$y-\frac{4}{x}\le 0$		**C**	$y\ge 0$
	δ	$A\setminus(B\cap C)$		**δ**	$(A\Delta B)\cap C$
23	**A**	$x^2-y\ge 0$	**24**	**A**	$y+x^2-6\le 0$
	B	$x+y\ge 0$		**B**	$x^2+y^2\le 4$
	C	$\lvert x\rvert\le 2;\quad \lvert y\rvert\le 2$		**C**	$x<y$
	δ	$(A\Delta B)\cup C$		**δ**	$(A\setminus B)\cap C$
25	**A**	$\lvert x\rvert\le 4;\quad \lvert y\rvert\le 4$	**26**	**A**	$x\ge\cos y$
	B	$x^2+y^2\le 25$		**B**	$x<0{,}5$
	C	$y>0$		**C**	$y>0$
	δ	$A\cap(B\setminus C)$		**δ**	$(A\Delta B)\cap C$
27	**A**	$y-x^2+4\ge 0$	**28**	**A**	$y-x^2-1\le 0$
	B	$\lvert x\rvert\le 2;\quad -4\le y\le 0$		**B**	$y-x^2+3\ge 0$
	C	$x^2+y^2\le 1$		**C**	$x^2+y^2\le 3$
	δ	$(A\cup B)\setminus C$		**δ**	$(A\cap B)\setminus C$
29	**A**	$y-\frac{4}{x}\le 0$	**30**	**A**	$2\le x\le 6$
	B	$x^2+y^2-25\le 0$		**B**	$0\le y\le\sqrt{x}$
	C	$\lvert x\rvert\le 4;\quad \lvert y\rvert\le 3$		**C**	$x^2-12x+y^2\le 0$
	δ	$A\cap(B\setminus C)$		**δ**	$(A\Delta B)\Delta C$

Пример решения задания 1.

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям $x + 2 > y$, $x^2 + y^2 \le 4$ и $|x| \le 2$; $|y| \le 2$ соответственно. Изобразите в системе координат xOy множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле $A \setminus (B \Delta C)$.

Решение:

A - множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой $y = x+2$.

Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающего границу.

C — множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата $|x| \le 2$; $|y| \le 2$.

Отметим горизонтальной штриховкой множество $B\Delta C$, а вертикальной — множество A (рис. 1, а).

Удалив из области, помеченной вертикальной штриховкой, точки области, помеченной горизонтальной штриховкой, мы получим множество точек, образующих D. Изобразим результат, отметив точки множества D вертикальной штриховкой (рис. 1, б).

точки множества D вертикальной штриховкой (р

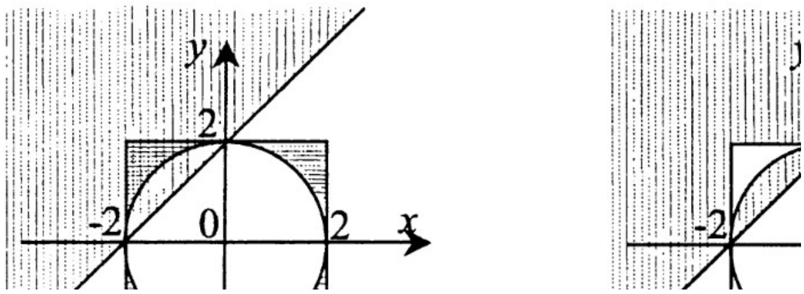


Рис. 1.

Задание 2

Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий B?

Варианты

Вар-т	Набор условий B
1	$N \setminus E = N \setminus P = \varnothing,\ E \setminus P \ne \varnothing$
2	$E \setminus P = N \setminus E = \varnothing,\ N \setminus P \ne \varnothing$
3	$N \cap E = \overline{E \cup N} = \overline{P} = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
4	$P \setminus E = N \setminus E = \varnothing,\ (P \cap E) \setminus N \ne \varnothing$
5	$P \setminus N = E = N \setminus P = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
6	$P \cap N = (N \setminus P) \setminus E = \varnothing,\ N \setminus E \ne \varnothing$
7	$N \cup E = E \cap P = \varnothing,\ P \setminus N \ne \varnothing$
8	$P \cap N = E \setminus P = P \setminus N = \varnothing,\ E \ne \varnothing$
9	$E \setminus N = N \cap E = N \setminus P = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
10	$P \setminus N = \overline{P \cup E} = \varnothing,\ \overline{N} \cap \overline{E} \ne \varnothing$
11	$N \setminus E = E \setminus P = P \setminus E = \varnothing,\ E \setminus N \ne \varnothing$
12	$P \cap N \cap E = N \setminus P = \varnothing,\ N \cap E \ne \varnothing$
13	$N \setminus P = E \cap P = \varnothing,\ E \ne \varnothing$
14	$P \setminus E = N \setminus E = \overline{N \cup E} = \varnothing,\ \overline{E} \ne \varnothing$
15	$P \setminus N = N \setminus P = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{E} \ne \varnothing$
16	$N \setminus P = (N \cap P) \setminus E = \varnothing,\ N \setminus E \ne \varnothing$
17	$P \setminus E = N \setminus E = N \cap P = \varnothing,\ P \ne \varnothing$
18	$P \setminus N = N \cap P = \varnothing,\ P \cap E \ne \varnothing$
19	$E \Delta P = N \cap E = \varnothing,\ P \setminus N \ne \varnothing$

20	$N \setminus P = E \setminus N = \overline{N} = \varnothing,\ \overline{P} \ne \varnothing$
21	$E = \overline{N \cup E} = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{N} \cap \overline{E} \ne \varnothing$
22	$E \setminus P = N \setminus P = \overline{N \cup P} = \varnothing,\ \overline{P} \ne \varnothing$
23	$N \setminus E = E \setminus P = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
24	$P \cap N = \overline{P \cup E} = \varnothing,\ N \setminus E \ne \varnothing$
25	$P \setminus E = N \setminus P = E \setminus P = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
26	$P \setminus E = N \setminus P = \overline{P} = \varnothing,\ \overline{E} \ne \varnothing$
27	$P \setminus E = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \ne \varnothing$
28	$E \setminus N = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \ne \varnothing$
29	$\overline{P} = E \setminus N = N \setminus E = \varnothing,\ N \ne \varnothing$
30	$N \setminus P = P \cap E = \varnothing,\ N \cap E \ne \varnothing$

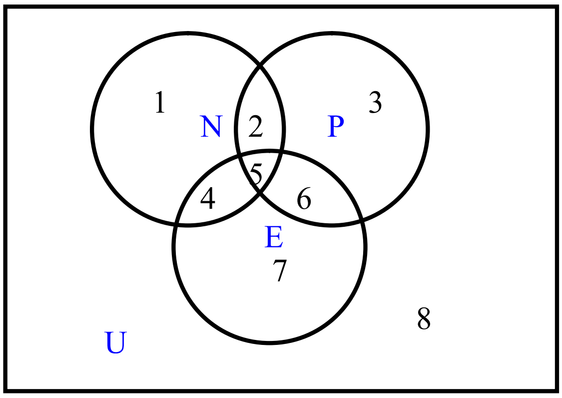
Пример решения задания 2

Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий:

E\N = P\E = Ø, P\N ≠Ø.

Решение:

Изобразим множества N, E, P в виде окружностей, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита окружностями, по одному символу: символ 4, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества и B, но не попавших в X, и т. д.



Теперь составим множества N, E, P и универсальное множество U:

N = {1,2,4,5},

E = {4,5,6,7},

P = {2,3,5,6},

U={1,2,3,4,5,6,7,8}.

E\N={6,7}

P\E={2,3}

P\N={3,6}

Чтобы выполнилось условие E/N =Ø, удаляем элементы списков 6, 7 из полученных множеств:

E\N={Ø}, P\E={2,3}, P\N={3}.

Для выполнения условия P\E = Ø удаляем элементы из списков 2, 3:

E\N={0}, P\E={Ø}, P\N={Ø}.

Но тогда множество P\N не будет содержать элементов. Итак, мы показали, что этот набор условий противоречив, т. е. не существует множеств N, E, P таких, что выполнены условия упражнения.

Задание 3

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, если A, B, X — произвольные подмножества универсального множества U.

Варианты заданий

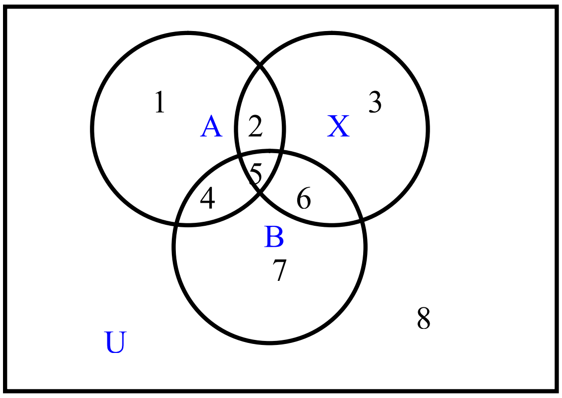
1	***D***	$B\cup\overline{X}$	**2**	***D***	$(A\cap B)\cup(A\setminus X)\cup\overline{B\cup X}$
	E	$(B\cap X)\cup(\overline{X}\setminus(A\cap B))$		***E***	$A\cup\overline{B}\cup X$
	F	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(B\cap(X\setminus A))$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(B\cap A)$
3	***D***	$(A\Delta X)\cup(B\cap A)$	**4**	***D***	$(B\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$A\cup X$		***E***	$((B\cup\overline{X})\setminus A)\cup(X\cap B)$
	F	$(A\setminus X)\cup(B\cap X)\cup(X\setminus A)$		***F***	$\overline{A\cup X}$
5	***D***	$(X\cap B)\cup(A\setminus B)\cup\overline{A\cup X}$	**6**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap B)$
	E	$A\cup B\cup\overline{X}$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup(X\cap(B\setminus A))$
	F	$(A\Delta B)\cup(X\cap A)\cup\overline{X\cup B}$		***F***	$\overline{A}\cup X$
7	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(X\setminus B)$	**8**	***D***	$(A\setminus X)\cup\overline{A\cup B}$
	E	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\cap A)$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup((A\setminus B)\setminus X)$
	F	$A\cup\overline{X}\cup\overline{B}$		***F***	$(A\setminus X)\cup\overline{B}$
9	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(A\cap B)$	**10**	***D***	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\setminus B)$
	E	$(A\cap X)\cup((A\setminus B)\setminus X)$		***E***	$\overline{A\cup X}\cup(X\cap\overline{B})$
	F	$A\cup\overline{X}$		***F***	$\overline{A}\cup X$
11	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\setminus A)$	**12**	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(X\cap(B\setminus A))$
	E	$((A\cup X)\setminus B)\cup((X\cup B)\setminus A)$		***E***	$(A\cap B)\cup((X\setminus B)\setminus A)$
	F	$\overline{A}\cup(A\setminus B)$		***F***	$\overline{A}\cup B$
13	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(X\setminus B)$	**14**	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\cap B)$
	E	$\overline{A}\cup X$		***E***	$A\cup B$
	F	$(\overline{A}\cap\overline{X})\cup(X\cap(A\setminus B))$		***F***	$(B\setminus A)\cup(A\cap X)\cup(A\setminus B)$
15	**D**	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap A)$	**16**	**D**	$(X\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$A\cup\overline{B}$		**E**	$(\overline{A}\cap\overline{X})\cup(X\cap B)$
	F	$((X\cup\overline{A})\setminus B)\cup(X\cap A)$		**F**	$A\cup\overline{X}\cup B$
17	**D**	$(A\cap X)\cup(B\setminus X)\cup\overline{A\cup B}$	**18**	**D**	$(A\cap X)\cup\overline{B\cup X}$
	E	$(X\Delta B)\cup(B\cap A)\cup\overline{X\cup B}$		**E**	$A\cup\overline{B}$
	F	$X\cup\overline{A}\cup B$		**F**	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(A\cap(X\setminus B))$
19	***D***	$\overline{A\Delta B}\cup(A\setminus X)$	**20**	***D***	$\overline{X\cup B}\cup(B\setminus A)$
	E	$B\cup\overline{X}\cup\overline{A}$		***E***	$(B\setminus A)\cup\overline{X}$
	F	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup(A\cap B)$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup((B\setminus X)\setminus A)$
21	***D***	$\overline{A}\cup B$	**22**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(\overline{X}\cap A)$
	E	$(A\cap B)\cup((B\setminus X)\setminus A)$		***E***	$A\cup(A\setminus B)$
	F	$\overline{A\Delta B}\cup(X\cap B)$		***F***	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup(A\setminus X)$
23	***D***	$(B\setminus X)\cup\overline{B}$	**24**	***D***	$\overline{B\Delta X}\cup(A\cap(X\setminus B))$
	E	$(B\Delta X)\cup(A\setminus B)$		***E***	$\overline{B}\cup X$
	F	$((B\cup A)\setminus X)\cup((X\cup A)\setminus B)$		***F***	$(B\cap X)\cup((A\setminus X)\setminus B)$

25	***D***	$B\cup X$	**26**	***D***	$((A\setminus B)\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$((X\Delta B)\cap B)\cup(X\cap(A\cup B))$		***E***	$(A\cap X)\cup(\overline{A}\setminus(X\cap B))$
	F	$(B\cap A)\cup(B\cap X)$		***F***	$\overline{A}\cup X$
27	***D***	$(X\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup X}$	**28**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap A)$
	E	$A\cup B\cup\overline{X}$		***E***	$((X\cup\overline{A})\setminus B)\cup(X\cap A)$
	F	$(X\cap B)\cup\overline{X\cup A}$		***F***	$\overline{B}\cup A$
29	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\cap B)$	**30**	***D***	$(A\cap X)\cup\overline{X\cup B}$
	E	$B\cup A$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(A\cap(X\setminus B))$
	F	$(A\setminus B)\cup(A\cap X)\cup(B\setminus A)$		***F***	$\overline{B}\cup A$

Пример решения задания 3

Выяснить взаимное расположение множеств: $D=(B\setminus X)\cup(A\setminus B)$, $E=(A\setminus(B\setminus X))$, $F=A\cup B$, если A, B, X —произвольные подмножества универсального множества U .

Возьмём множества A, B, X, находящиеся в общем положении (В нашем случае, как и при решении задания 2, цифры обозначают соответствующие списки переменных):



A = {1,2,4,5},
B = {4,5,6,7},
X ={2,3,5,6}.

Тогда $B\setminus X$={4,7}, $A\setminus B$ = {1,2},
$E=A\setminus(B\setminus X)$ = {1,2,5},
$F=A\cup B$={1,2,4,5,6,7},
$D=(B\setminus X)\cup(A\setminus B)$ = {1,2,4,7}.

Итак, видим, что включения $D\subseteq F$ и $E\subseteq F$ выполняются для произвольных множеств A, B, X.

Если символы 1,2,4,5,6,7 обозначают соответствующие числа, имеем, что 4 ϵ D и $4\notin E$, 5ϵ E и $5\notin D$,$1\in D\cap E$, то есть множества D и E могут находиться в общем положении.

Контрольные вопросы

1. Поясните понятие множества. Приведите примеры множеств. Как обозначаются множества и их элементы?
2. Какие существуют способы задания множеств?
3. Как обозначается принадлежность и непринадлежность элемента множеству?
4. Какие существуют отношения между двумя множествами?
5. Перечислите операции над множествами с приведением соответствующих диаграмм Эйлера - Венна.

Лабораторная работа №2. Алгебра множеств

Цель: Освоить доказательство тожеств и упрощение выражений с помощью законов алгебры множеств.
Тема: Алгебра множеств

Задание 1 Задание 2 Задание 3

Теоретические сведения:

Мощность обозначается $|A|$ или N(A) и представляет собой количество элементов в множестве. Если множество имеет n элементов, то это можно записать $|M| = \mathbf{n}$.

Обозначим N(A)- кол-во элементов множества A, тогда число элементов суммы 2-х множеств

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$$

N(A)+N(B) мы получим сосчитав все элементы множеств A и B. Но если множества A и B пересекаются, то общие элементы будут (число их $N(A\cap B)$) перечислены дважды. Следовательно, из суммы надо вычесть $N(A\cap B)$. Для трех множеств:

$N(A\cup B\cup C)=N\{A\cup(B\cup C)\}=$

$N(A)+N(B\cup C)-N\{A\cap(B\cup C)\}=$

$N(A)+ N(B)+N(C)-N(B\cap C)-N\{(A\cap B)\cup(A\cap C)\}=$

$N(A)+N(B)+N(C)-N(B\cap C)- \{N(A\cap B)+N(A\cap C)-N(A\cap B)\cap(A\cap C)\}= N(A)+N(B)+N(C)-N(B\cap C)-N(A\cap C)- N(A\cap B)+N(A\cap B\cap C)$.

Данная формула носит название формулы включения исключения.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество **M=XY** всех упорядоченных пар **(x,y)**, где $x\in X$, $y\in Y$. Аналогично определяется декартово произведение любого набора множеств. Произведение $X\times X$ называется декартовым квадратом множества X. Произведение $X\times X\times X\ldots\times X$ называется декартовой степенью.

Например:

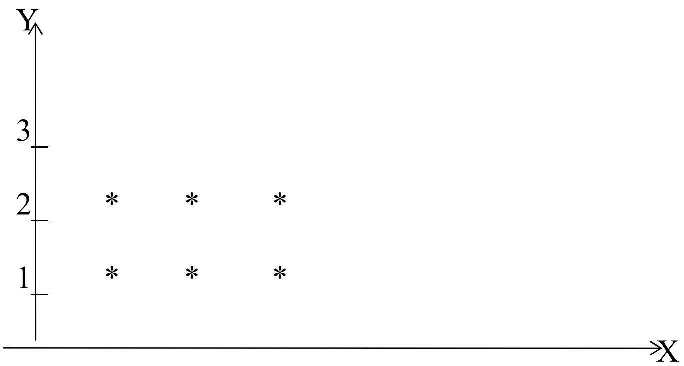
X={1,2}

Y={яблоко,апельсин,груша}

X*Y={<1,яблоко>,<2,яблоко>,<1,апельсин>,<2,апельсин>, <1,груша>,<2,груша>}

Мощность декартова произведения $|A\times B|=|A|\times|B|$.

Пример декартова произведения:



X={1,2,3}
Y={1,2}

Соотношения между множественными операциями.

1. $A\subset A$
2. Если $A\subset B$ и $B\subset A \Rightarrow A=B$
3. Если $A\subset B$ и $B\subset C \Rightarrow A\subset C$
4. $0\subset A$
5. $A\subset U$

6. A + B = B + A коммутативность сложения.
7. AB = BA коммутативность умножения.
8. A + (B + C) = (A + B) + C ассоциативность сложения.
9. A(BC) = (AB)C ассоциативность умножения.
10. AA = A
11. A (B + C) = AB + AC дистрибутивность
12. A + BC = (A + B)(A + C)
Роль нуля и единицы играют пустое и универсальное множество.
13. A + 0 = A свойство пустого элемента.
14. $A \cup A = A$
15. A + U = U
16. A0 = 0
17. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B,\ AB \Rightarrow A$
18. $A + \overline{A} = U$
19. $A\overline{A} = 0$
20. $\overline{0} = U$
21. $\overline{U} = 0$
22. $\overline{(\overline{A})} = A$
23,24. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
25. $\overline{B} \subset \overline{A}$
Все эти формулы можно заменить запоминанием операций:
1. Сложение множеств.
2. Образование дополнения.
Потребовав при этом, чтобы выполнялись следующие три основные соотношения
A + B = B + A
(A + B)+C = A+(B + C)
$\overline{(\overline{A} + \overline{B})} + \overline{(\overline{A} + \overline{B})} = A$
Все остальные 25 формул можно вывести отсюда.

С помощью этих же положений можно решать различные задачи упрощения выражений.

Задание 1

Операция декартового произведения (×)
1. Проверить справедливость равенства A для множеств A = {1,2}, B = {2,3},C = {1,3}.
2. Выяснить, верно ли равенство A для произвольных A, B, C.
<u>Варианты заданий</u>

№	A
1	$A \times C = \left(A \times \left(C \setminus B\right)\right) \cup \left(A \times \left(C \cap B\right)\right)$
2	$A \times C = \left(A \times \left(C \cap B\right)\right) \cup \left(A \times C\right)$
3	$A \times \left(B \Delta C\right) = \left(A \times \left(B \cup C\right)\right) \setminus \left(A \times \left(C \cap B\right)\right)$
4	$A \times C = \left(A \times \left(C \setminus B\right)\right) \cup \left(A \times C\right)$
5	$A \times \left(B \cup C\right) = \left(A \times B\right) \cup \left(A \times \left(C \setminus B\right)\right)$
6	$A \times \left(C \setminus B\right) = \left(A \times C\right) \Delta \left(A \times \left(C \cap B\right)\right)$
7	$A \times C = \left(A \times \left(C \cup B\right)\right) \cap \left(A \times C\right)$
8	$A \times \left(C \cap \left(B \Delta C\right)\right) = \left(A \times C\right) \Delta \left(A \times \left(C \cap B\right)\right)$

9	$A\times(C\setminus B)=(A\times C)\setminus(A\times(C\cap B))$
10	$A\times(B\cup C)=(A\times(B\Delta C))\cup(A\times(B\cap C))$
11	$A\times C=(A\times(C\cup B))\setminus(A\times(B\setminus C))$
12	$A\times(B\cap C)=(A\times C)\setminus(A\times(C\setminus B))$
13	$A\times(B\cap C)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times(B\Delta C))$
14	$A\times(C\setminus B)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times B)$
15	$B\times A=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times(A\cap C))$
16	$B\times A=(B\times(A\cap C))\cup(B\times A)$
17	$B\times A=(B\times A)\cup(B\times(A\setminus C))$
18	$B\times(A\cup C)=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times C)$
19	$B\times A=(B\times A)\cap(B\times(A\cup C))$
20	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\cap C))$
21	$B\times A=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times(C\setminus A))$
22	$B\times(A\cap C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\setminus C))$
23	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\Delta(B\times(A\cap C))$
24	$B\times(A\setminus C)=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times C)$
25	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times(B\cap A))$
26	$C\times B=(C\times(B\cap A))\cup(C\times B)$
27	$C\times(A\Delta B)=(C\times(A\cup B))\setminus(C\times(A\cap B))$
28	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times B)$
29	$C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times(B\setminus A))$
30	$C\times(A\setminus B)=(C\times A)\Delta(C\times(A\cap B))$

<u>Пример решения задания 1</u>

1. Проверить справедливость равенства

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ для множеств A = {1,2}, B = {2,3},C = {1,3}.

Решение:

$$C\times(B\setminus A)=\{1{,}3\}\times(\{2{,}3\}\setminus\{1{,}2\})=\{(1{,}3),(3{,}3)\}$$

$$C\times(A\cap B)=\{1{,}3\}\times(\{1{,}2\}\cap\{2{,}3\})=\{1{,}3\}\times\{2\}=\{(1{,}2),(3{,}2)\}$$

$$C\times B=\{1{,}3\}\times\{2{,}3\}=\{(1{,}3),(1{,}2),(3{,}2),(3{,}3)\}.$$

$$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=\{(1{,}3),(1{,}2),(3{,}2),(3{,}3)\}\Delta\{(1{,}2),(3{,}2)\}=\{(1{,}3),(3{,}3)\})$$

Итак, мы убедились, что в нашем примере равенство выполнено.

2. Выяснить, верно ли равенство

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ для произвольных A, B, C.

Решение:

Пусть $x, y \in (C \times (B - A)) \Rightarrow \begin{cases} x \in C \\ и \\ y \in (B - A) \end{cases} \Rightarrow \{(x \in C) и (y \in B) и (y \notin A)\}$

Пусть

$$x, y \in (C \times B)\Delta(C \times (A \cap B)) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x, y \in ((C \times B) - (C \times (A \cap B))) \\ или \\ x, y \in ((C \times (A \cap B)) - (C \times B)) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x, y \in (C \times B) и x, y \notin (C \times (A \cap B)) \\ или \\ x, y \in (C \times (A \cap B)) и x, y \notin (C \times B) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Первое преобразование было выполнено по определению симметрической разности, а второе – по определению разности.

$$\begin{Bmatrix} (x \in C) и (y \in B) и \notin ((x \in C) и (y \in A) и (y \in B)) \\ или \\ (x \in C) и (y \in A) и (y \in B) и \notin ((x \in C) и (y \in B)) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (x \in C) и (y \in B) и ((x \notin C) или (y \notin A) или (y \notin B)) \\ или \\ (x \in C) и (y \in A) и (y \in B) и ((x \notin C) или (y \notin B)) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Первое преобразование выполнено по определению декартового произведения, а второе – по закону де Моргана. Теперь по закону дистрибутивности получим:

$$\left\{ \begin{pmatrix} (y \in B) и (x \in C) и (x \notin C) \\ или \\ (y \in B) и (x \in C) и (y \notin A) \\ или \\ (y \in B) и (x \in C) и (y \notin B) \\ или \\ (x \in C) и (y \in A) и (y \in B) и (x \notin C) \\ или \\ (x \in C) и (y \in A) и (y \in B) и (y \notin B) \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Theta \\ или \\ (y \in B) и (x \in C) и (y \notin A) \\ или \\ \Theta \\ или \\ \Theta \\ или \\ \Theta \end{Bmatrix} \Rightarrow (y \in B) и (x \in C) и (y \notin A)$$

Как видно, полученные выражения для левой и правой частей совпали, т.е. тождество доказано.

Задание 2.

Решить задачу, используя формулу включения-исключения.

Варианты

1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида A, B, C. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию A и B – 18 предприятий, продукцию A и C – 15 предприятий, продукцию B и C – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию A равно числу предприятий, выпускающих продукцию B и равно числу предприятий, выпускающих продукцию C. Найти число всех предприятий.

2. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?

3. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку “отлично” по английскому языку, 8 - по математике, 7 - по физике, 4 - по английскому языку и по математике, 5 - по английскому языку и по физике, 4 - по математике и по физике, 3 - по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок?

4. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной пятерки, 6 учеников получили 5 по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе; 2 - по истории и математике, 2 - по истории и литературе, 1 - по математике и литературе. Сколько учеников получили 5 по всем предметам?

5. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.

6. Группе студентов предложено три спецкурса: по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?

7. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?

8. В группе переводчиков 15 человек владеет английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языком, 7 – английским и немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

9. Опрос группы студентов показал, что 70% из них любят ходить в кино, 60% в театр, 30% на концерты. В кино и театр ходят 40% студентов, в кино и на концерты – 20%, в театр и на концерты – 10%. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?

10. В группе 20 учеников. После медицинского осмотра на дополнительное обследование 14 учеников были направлены к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 ученика, к терапевту и ортопеду –3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько учеников были направлены к терапевту, окулисту и ортопеду?

11. При обследовании рынка спроса инспектор указал в опросном листе следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 покупают жевательную резинку "Дирол", 752 – "Орбит" , 418 – "Стиморол", 570 – "Дирол" и "Орбит", 356 – "Дирол" и "Стиморол", 348 – "Орбит" и "Стиморол", 297 – все виды жевательной резинки. Показать, что инспектор ошибся.

12. Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро и толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько было участников?

13. Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро – на ударных инструментах, пятеро – на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Один человек играет на всех трех инструментах. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?

14. В одной студенческой группе 10 человек могут работать на Дельфи, 10 – на Паскале, 6 – на Си. По два языка знают: 6 человек – Дельфи и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Дельфи и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

15. В день авиации на аэродроме всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатились 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, На планере и дельтаплане – 5. Два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?

16. Все грибники вернулись домой с полными корзинами. У десятерых из них в корзинах были белые грибы, у восемнадцати – подберезовики, у двенадцати – лисички. Белые и подберезовики были в шести корзинах, белые и лисички – в четырех, Подберезовики и лисички – в пяти. Все три вида грибов были у двух грибников. Сколько было грибников?

17. Все туристы взяли в поход консервы. Шесть человек взяли тушенку, пять – сгущенку, восемь – кашу (с мясом). У троих в рюкзаках была тушенка и сгущенка, у двоих – тушенка и каша, у троих – сгущенка и каша, и только в одном рюкзаке лежали все три вида консервов. Сколько было туристов?

18. Было опрошено 70 человек. В результате опроса выяснили, что 45 человек знают английский язык, 29 – немецкий и 9 – оба языка. Сколько человек из опрошенных не знает ни английского, ни немецкого языков?

19. В туристической группе 10 человек знают английский язык, 10 – итальянский, 6 – испанский. По два языка знают: 6 человек – английский и итальянский, 4 – английский и испанский, 3 – итальянский и испанский. Один человек знает все три языка. Сколько туристов в группе?

20. Предприятие объявило набор рабочих на должности токаря, слесаря и сварщика. В отдел кадров обратились 25 человек. Из них 10 человек владели профессией токаря, 15 – слесаря, 12 – сварщика. Профессией и токаря и слесаря владели 6 человек, и токаря, и сварщика – 5 человек, и слесаря и сварщика – 3 человека. Сколько человек владеют всеми тремя профессиями?

21. Оказалось, что в группе туристов 15 человек были раньше во Франции, 19 – в Италии, 8 – в Германии. 9 туристов были во Франции и в Италии, 7 – во Франции и в Германии, 6 – и в Италии, и в Германии. 4 туриста были во всех трех странах. Сколько туристов были хотя бы в одной из трех стран?

22. Группе студентов из 30 человек была предложена контрольная работа из трех задач. Первую задачу решили 15 студентов, вторую – 13, третью – 12. Первую и вторую задачи решили 7 человек, первую и третью – 6, вторую и третью – 5 человек. Все три задачи решили 2 студента. Сколько студентов

23. Анализ историй болезней группы из 20 детей показало, что 10 детей болели ветрянкой, 6 – корью, 5 – свинкой. Ветрянкой и корью болели 3 ребенка, ветрянкой и свинкой – 3, корью и свинкой – 2. Всеми тремя болезнями болел один ребенок. Сколько детей не болели ни одной из перечисленных болезней?

24. В книжный киоск привезли для продажи 100 книг Пушкина, Лермонтова и Тургенева. Книги Пушкина купили 60 человек, книги Лермонтова – 50, книги Тургенева – 30 человек. Книги Пушкина и Лермонтова купили 40 человек, книги Пушкина и Тургенева – 20, книги Лермонтова и Тургенева – 10 человек. Пять человек купили книги всех трех писателей. Сколько человек не купили ни одной из перечисленных книг?

25. Группа научных работников состоит из 100 человек. Из них 70 человек владеют английским языком, 50 – немецким, 40 – французским, 30 – английским и немецким, 25 – английским и французским, 15 – французским и немецким. Хотя бы один язык знает каждый научный работник. Сколько человек владеют всеми тремя языками?

26. На курсы иностранных языков записалось 100 человек. Оказалось, что 70 человек будут изучать английский язык, 60 человек – французский и 30 человек - немецкий. Английский и французский собираются изучать 40 человек, английский и немецкий – 20, французский и немецкий – 10. Сколько студентов будут изучать все три языка?

27. В команде бегунов десять спортсменов бегают на длинные дистанции, восемнадцать – на средние, двенадцать – на короткие. На длинные и средние дистанции бегают пять спортсменов, на средние и короткие – шесть. На длинные и короткие дистанции не бегает никто. Сколько бегунов в команде?

28. В студенческой группе 25 человек. Чтобы получить допуск на экзамен по данному курсу необходимо защитить курсовую работу, выполнить лабораторную работу и сдать зачет. 15 студентов защитили курсовую работу, 20 выполнили лабораторную работу, 17 сдали зачет. Защитили курсовую работу и выполнили лабораторную работу 12 человек. Защитили курсовую работу и сдали зачет 13 человек. Выполнили лабораторную работу и сдали зачет 16 человек. Сколько студентов допущено к экзамену?

29. В классе 20 детей. Из них 10 дополнительно занимаются в музыкальной школе, 6 – теннисом, 5 – китайским языком. Музыкальную школу и занятия по теннису посещают три ребенка, музыкой и китайским языком занимаются трое, теннисом и китайским языком двое. Всеми тремя видами дополнительных занятий занимается один ребенок. Сколько детей не занимается ни одним из перечисленных занятий?

30. В цеху имеется 25 станков, которые могут выполнять три вида операций: A, B и C. Из них 10 станков выполняют операцию A, 15 – B, 12 – C. Операции A и B могут быть выполнены на 6 станках, A и C – на 5, B и C – на 3 станках. Сколько станков могут выполнять все три операции?

Пример решения задания 2

На предприятии работают 60 сотрудников. Из них 30 знают язык Си, 20-язык Ассемблер, 10-оба языка. Сколько сотрудников не знают ни одного языка.

Решение.

Пусть
W-множество всех сотрудников =60;
E- знают оба языка = 10;
A-знают язык Си = 30;
B-знают язык Ассемблер = 20;
C-не знают = ?.
По формуле включения-исключения получим:
$C=W-E=W-N(A\cup B)$
$E=N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$
$C=W-N(A)-N(B)+N(A\cap B)=60-30-20+10=20$

Задание 3.

Выполнить указанные действия над выражением, используя законы алгебры множеств. Выполнить проверку на кругах Эйлера

Варианты

вариант	действие	выражение
1	Упростить	$\overline{(A \cup B)} \;\cup\; \overline{A} \cup \overline{B}$
2	Доказать	A – (B – C) = (A – B) + AC

3	Установить, верно или неверно равенство?	$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
4	Установить, верно или неверно равенство?	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup C$
5	Установить, верно или неверно равенство?	$(A \cap B) \cap (A \cup B) = B$
6	Упростить	$(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$
7	Упростить:	$\overline{A} \cup (B \setminus (A \cup B))$
8	Установить, верно или неверно равенство?	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$
9	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{(A \cup B)} \cap C) = \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C$
10	Установить, верно или неверно равенство?	$(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$
11	Установить, верно или неверно равенство?	$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$
12	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$
13	Установить, верно или неверно равенство?	$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
14	Упростить	$\overline{(A \cup B) \cap (A \cap B)}$
15	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$
16	Установить, верно или неверно равенство?	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$
17	Установить, верно или неверно равенство?	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$
18	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{(A \cup B)} \cap C) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$
19	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$
20	Упростить	$(A \setminus (A \cap B)) \cup B$
21	Упростить	$(A \cap C) \setminus (C \cap (A \cup B))$
22	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{(A \cap B)} \cup C) = \overline{A} \cup \overline{B} \cup C$
23	Упростить	$\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
24	Установить, верно или неверно равенство?	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$
25	Установить, верно или неверно равенство?	$\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$
26	Доказать тождество	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

27	Упростить	$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
28	Доказать	$A\Delta(A\Delta B) = B$
29	Доказать	$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
30	Доказать тождество	A – (B – C) = (A – B) + AC

<u>Пример решения задания 3</u>

Доказать:

A Δ (B Δ C) = (A Δ B) Δ C

Пусть $x \in A\Delta(B\Delta C) = (\mathrm{A} - [(\mathrm{B} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B})]) + ([(\mathrm{B} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B})] - \mathrm{A}) \Rightarrow$

/* $A - B = A \cdot \overline{B}$ - все элементы A, которых нет в B*/

⇨ $(A \cdot \overline{(B - C) + (C - B)\ \ }) + ((B - C) + (C - B) \cdot \overline{A} =>$

/* $\overline{X + Y} = \overline{X} * \overline{Y}$ - правило де Моргана/

⇨ $(A * \overline{B - C}) * \overline{(C - B)} + ((B * \overline{C}) + (C * \overline{B}) * \overline{A}) =>$

⇨ $(A * \overline{(B - \overline{C}}) * \overline{(C - \overline{B})} + (B * \overline{C}) + (C * \overline{B}) * \overline{A}$

/* $\overline{X * Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ - правило де Моргана/

⇨ $\left(A \cdot \left(\overline{B} + C\right)\left(\overline{C} + B\right)\right) + \left(B \cdot \overline{C} \cdot \overline{A}\right) + \left(C \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}\right)$

⇨ $\left[(A\overline{B}) + (AC)\right] \cdot (\overline{C} + B) + (B \cdot \overline{C} \cdot \overline{A}) + (C \cdot \overline{B} \cdot \overline{A})$

⇨ $(A\overline{B} \cdot \overline{C}) + (A\overline{B} \cdot B) + AC\overline{C} + ACB + (B \cdot \overline{C} \cdot \overline{A}) + (C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

0 0

⇨ $A\overline{B}\overline{C} + ACB + B\overline{A}\overline{C} + C\overline{A}\overline{B}$

⇨ $(A\overline{B}\overline{C} + B\overline{A}\overline{C}) + (ACB + C\overline{A}\overline{B})$

⇨ $\overline{C}(A\overline{B} + B\overline{A}) + C(AB + \overline{A}\overline{B})$

⇨ $\left[(A - B) + (B - A) - C\right] + C(AB + \overline{B} \cdot \overline{A})$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C(\overline{\overline{BA}} + \overline{B + A})$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C(\overline{\overline{\overline{AB}}(B + A)}$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C(\overline{(\overline{A} + \overline{B})(B + A)}$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C(\overline{\overline{A}B + \overline{A}A + \overline{B}B + \overline{B}A})$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

0 0

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C(\overline{\overline{A}B + \overline{B}A})$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + (\overline{B - A)(A - B})$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + \{C - [(B - A) + (A - B)]\}$

⇨ $\left[(A\Delta B) - C\right] + C - (A\Delta B)$

⇨ $(A\Delta B)\Delta C$

<u>Контрольные вопросы:</u>

1. Дать определение декартового произведения
2. Объяснить смысл формулы включения-исключения
3. Написать закон де-Моргана

Лабораторная работа №3. Отношения

Цель: Получить навыки распознавания свойств отношений и функций.
Тема: Отношения

Задание 1 Задание 2

Теоретические сведения

Отношение – подмножество R декартового произведения двух множеств. ($R \subset A \times B$).

Если $R \subset A \times A \times \ldots \times A$ (т.е. $R \subset A^n$), то говорят, что R есть n-местное отношение на A. Понятие отношения служит в математике для выражения на теоретико-множественном языке связей между объектами.

Областью определения Dom R называется множество элементов a Є A, для каждого из которых найдется хотя бы один элемент b Є B такой, что aRb.

Двухместные отношения называются бинарными, т.е. бинарное отношение является подмножеством р декартова произведения X*Y.

Основные свойства бинарных отношений:

1. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ

$(\forall\ m \in M)\ ((m, m) \in T)$.

Отношение R называется рефлексивным на множестве M , если для всякого A Є M пара < A,A > Є R , т. е. для всякого A верно A R A.

2. СИММЕТРИЧНОСТЬ

$(\forall\ a, b \in M, a \neq b)\ ((a, b) \in T \rightarrow (b, a) \in T)$.

3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

$(\forall a, b, c \in M, a \neq b, a \neq c, b \neq c)((a, b) \in T, (b, c) \in T \rightarrow (a, c) \in T)$.

Отношение R называется полным на M, если для всякой пары несовпадающих элементов A и B , по меньшей мере одно из двух отношений A R B и B R C имеет место.

Отношение может обладать свойством, обладать анти-свойством (если отношение не обладает свойством ни для одного элемента множества) и не обладать свойством (если для некоторых элементов множества свойство имеет место, а для не которых – нет). Т.е. отношение может быть, например, рефлексивным, или антирефлексивным, или нерефлексивным.

Виды отношений

Функции

Подмножество F ⊂ Mx × My называется функцией, если для каждого элемента x ∈ Mx найдется не более одного элемента y ∈ My вида (x, y) ∈ F.

При этом, если для каждого элемента x имеется точно один элемент y вида (x, y) ∈ F, то функция называется всюду (полностью) определенной, в противном случае – частично определенной (недоопределенной). Множество Mx образует область определения функции F, множество My – область значений функции F.

Часто вместо записи (x, y) ∈ F используют запись y = F(x); при этом элемент x называют аргументом или переменной, а y – значением функции F.

Сюрьекция

Функция y = F(x) называется сюръективной, если для каждого элемента y ∈ My найдется элемент x ∈ Mx вида (x, y) ∈ F. Т.е. множество ее значений совпадает с областью значений.

Инъекция

Пусть: B=f(A). Мы будем называть ее инъективной или инъекцией, если из соотношения f(a1)=f(a2) следует, что a1=a2 для всех a1, a2 Є A.

Т.е. у инъективной функции нет повторяющихся значений. Иными словами, разные входные данные дают различные выходные данные. Т.е. если функция не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Биекция

Функция называется биекцией, если она является инъекцией и сюрьекцией.

Строго говоря, инъекцией и сюрьекцией может быть любое отношение.

Задание 1.

Выяснить, обладает ли отношение свойствами или антисвойствами рефлексивности, симметричности, транзитивность и является ли оно полным.

Варианты

	множество	отношение
1	Натуральные числа	x+y кратно 3
2	[0, 4]	x>2y+1
3	R	$x^2+y^2=1$
4	Натуральные числа	x и y имеют одинаковый остаток от деления на 3
5	Студенты нашего ВУЗа	x и y учатся на одной специальности
6	Жители Донецка	x и y имеют машину «Жигули»
7	спортсмены	x и y - легкоатлеты
8	Жители Донбасса	x и y - супруги
9	Жители Донецка	x – бабушка y
10	R	$2x>y^2$
11	Участники теннисного турнира	x и y сыграли между собой
12	Участники теннисного турнира	x победил y
13	Студенты	x и y учатся в одном ВУЗе
14	Натуральные числа	x > y
15	Натуральные числа	x = y
16	Жители Донецка	x и y сегодня пойдут на Донбасс Арену
17	Жители Донбасса	x теща y
18	Дети одних родителей	x и y - братья
19	Студенты одной группы	x и y живут в общежитии
20	Жители Донецка	x и y – имеют имя Петя
21	Легкоатлеты в забеге	x обогнал на финише y
22	Натуральные числа	x и y четные
23	Натуральные числа	x – y =3
24	Натуральные числа	x*y кратно 3
25	Натуральные числа	x + y =10
26	Жители Донбасса	x и y живут в Донецке
27	Жители Донецка	x старше y
28	Жители Горловки	x и y родились в один день
29	Прямые на плоскости	x и y пересекаются
30	Месяца года	x следует за y

Пример выполнения задания 1.

Выяснить, какими из свойств обладает на множестве целых чисел отношение «x кратно y»

Решение:

Отношение рефлексивно, т.к. любое целое число делится на себя без остатка.

Отношение антисимметрично, т.к. если x кратно y, то y никогда не кратен x.

Отношение транзитивно, т.к. если x кратен y, а y кратен c, то x кратен c.

Отношение не полное, потому что из любых двух целых чисел не обязательно что одно кратно другому.

Задание 2.

Выяснить, относится ли отношение G к какому-либо из видов (функциональность, сюръективность, инъективность, биективность). Если отношение является функцией, то выяснить, является ли функция полностью определенной.

Варианты

№	X	Y	G
1	a,b,c,d,e	1,2,3	$(a,2),(b,3),(c,1),(d,2),(e,1)$
2	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(b,3),(c,2),(d,1)$
3	a,b,c,d	1,2,3,4,5	$(a,3),(b,5),(c,4),(d,1)$
4	a,b,c,d,e	1,2,3,4	$(d,1),(b,2),(e,4),(a,3)$
5	a,b,c,d,e	1,2,3	$(b,2),(c,1),(e,3),(a,3)$
6	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,2),(b,3),(c,1),(a,4)$
7	a,b,c,d,e	1,2,3,4,5	$(a,5),(b,3),(d,1),(e,2)$
8	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(b,4),(c,3),(d,1)$
9	a,b,c	1,2,3,4,5	$(a,2),(b,1),(c,5),(a,3)$
10	a,b,c	1,2,3	$(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)$
11	a,b,c,d	1,2,3,4,5	$(a,2),(c,1),(d,5),(c,3)$
12	a,b,c,d,e	1,2,3,4	$(b,1),(c,3),(d,2),(c,1)$
13	a,b,c,d	1,2,3	$(a,1),(b,1),(c,3),(b,2)$
14	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(b,3),(b,2),(c,3),(d,4)$
15	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(c,4),(b,2),(a,3)$
16	a,b,c,d,e	1,2,3	$(a,2),(b,1),(d,3),(e,1)$
17	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,3),(a,2),(c,2),(d,1)$
18	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(c,2),(d,1),(c,4)$
19	a,b,c	1,2,3,4,5	$(a,2),(b,5),(c,4),(b,3)$
20	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,1),(b,3),(a,2),(c,4)$
21	a,b,c,d	1,2,3	$(a,3),(b,3),(c,1),(d,2)$
22	a,b,c,d	1,2,3	$(a,1),(b,3),(c,2),(a,2)$
23	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(b,4),(c,1),(d,2)$
24	a,b,c	1,2,3,4	$(a,3),(b,1),(c,2),(c,1)$
25	a,b,c,d,e	1,2,3	$(c,2),(d,1),(a,3),(b,3)$
26	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,2),(c,3),(d,1),(b,4)$
27	a,b,c,d,e	1,2,3,4,5	$(b,5),(c,3),(e,1),(a,2)$
28	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,3),(c,4),(d,3),(a,1)$
29	a,b,c	1,2,3,4,5	$(b,2),(c,1),(a,5),(b,3)$
30	a,b,c	1,2,3	$(b,1),(b,3),(c,2),(a,3)$

Пример выполнения задания 2.

Пусть задано отношение Г = (X,Y,G), если X={a,b,c,d}, Y = {1, 2, 3, 4, 5}, G = {(a,2),(b,l),(b,5),(d,4)}. Выяснить, какими из 4 основных свойств (функциональность, сюръективность, инъективность, биективность) обладает Г.

Решение

Отношение не является функцией, т.к. для одного и того же аргумента b задано два значения: 1 и 5.

Отношение не является сюрьекцией, потому что не все элементы множества Y входят в отношение (в отношении нет элемента 3)

Отношение является инъекцией, т.к. оно не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Отношение не является биекцией, т.к. не сюрьекция и не инъекция.

Контрольные вопросы

1. Дать определения понятия «отношение»
2. какие отношения называются бинарными?
3. Охарактеризовать каждое из свойств отношений (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Привести примеры.
4. Какие отношения называют функциональными?
5. Объяснить понятия инъекция, сюрьекция, биекция.

Лабораторная работа №4. Комбинаторика

Цель: Освоить решение комбинаторных задач.
Тема. Комбинаторика

Задание 1 Задание 2

Теоретические сведения

Комбинаторика (комбинаторный анализ) - часть математики изучающая множества, состоящие из дискретных элементов.

Основной принцип комбинаторики.

Правило 1. Правило произведения

Если некоторый выбор А можно осуществить m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор В можно осуществить n другими способами, то выбор А *и* В (в указанном порядке) можно осуществить m*n способами.

Теоретико-множественная формулировка этого же правила : Если 1) M1, M2, ...Mк - конечные множества и 2) M=M1*M2..*Mk - их декартово произведение, то |M|=|M1*M2*...Mк|=|M1||M2|...|Mк|.

Правило 2. Правило суммы (комбинаторная формулировка) :
Пусть объект
a1 может быть выбран m1 способами,
a2 может быть выбран m2 способами,
....
ак может быть выбран mк способами,
тогда выбор объекта **a1** или **a2** или ... **ак** может быть сделан **m1+m2+...mк** способами (выбор произвольного **ai** исключает выбор любого другого объекта).

Правило суммы (теоретико-множественная формулировка) : Пусть конечное множество M является объединением своих попарно непересекающихся множеств M1, M2, ... Mк , тогда

|M|=|M1|+|M2|+...|Mк|.

Пусть $M = \{1,2,..,n\}$ - какое-либо конечное множество; *соединением элементов из множества* M называется любой набор, составленный из элементов множества M. Если в этом наборе какой-либо элемент встречается больше, чем один раз то говорят о *соединении с повторениями*; если же в наборе каждый элемент появляется лишь один раз, то говорят о *соединении без повторений.*

Соединения без повторений

Сочетания

Пусть M={a1, a2, ...an} - фиксированное n-множество. k - *сочетаниями* множества M (сочетаниями из n элементом по k или просто сочетаниям) называются неупорядоченное k - подмножества {ai, aj, ...aк} множества M, т.е. всякое соединение, в котором порядок следования элементов не учитывается.

Перестановки

Перестановкой элементов множества M называется всякое соединение элементов множества M, в котором обязательно присутствуют все элементы из M и в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом.

Размещение

Всякое соединение из k элементов множества $M = \{1,2,..,n\}$, в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом, называется *размещением из* n *по* k. Перестановки фактически являются частным случаем размещений при $k = n$.

Соединения с повторениями.

На практике часто возникают случаи, когда рассматриваемые предметы (элементы множеств) одинаковы или одинакова часть из них (в рамках задачи).

Пусть задано n-множество A={a,b,...t} и множество M, являющееся объединением своих попарно непересекающихся подмножеств $M=Ma \cup Mb \cup Mt$, где

Ma={a1,a2,...};
Mb={b1,b2,...};
....
Mt={t1,t2,...}.

Элементы a1,a2,..в множестве Ma, b1,b2,..в множестве Mb и т.д. из одного и того же подмножества мы будем отождествлять между собой, считать их "одинаковыми" или "эквивалентными" или "равными" и будем записывать их в виде просто A (просто B,...). Число элементов в i-ом подмножестве называется кратностью i-го элемента.

Определение количества соединений без повторений и с повторениями представлен в таблице:

Соединения	Без повторений	С повторениями
Перестановки	$P_n = n!$	$P(n;n_1,n_2,...,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$
Размещения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$\widetilde{A}_n^m = n^m$
Сочетания	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$\widetilde{C}_n^m = C_{n-1+m}^{n-1} = C_{n-1+m}^m$

Метод рекуррентных соотношений

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение комбинаторной задачи с **n** предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, называемого рекуррентным.

Рекуррентным соотношением порядка k называется формула

$$\mathbf{x_{n+k} = F(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})},$$

которая может быть рассмотрена как уравнение относительно неизвестных членов последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$. Такое уравнение дает возможность вычислить (n+k)-й член последовательности, если известны значения k предыдущих членов.

Рекуррентное соотношение вида :

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n + B$$ называется линейным.

Если B равно нулю оно называется однородным, при B, не равном нулю, оно называется неоднородным. В общем случае Ai и B зависят от n.

Общим решением линейного однородного рекуррентного соотношения (ЛОРС) вида

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n$$

является

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n$$

где λ - корни характеристического уравнения (k различных корней)

$$\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \dots - a_{k-1}\lambda^1 - a_k = 0$$

и если λ имеет кратность t1,то соответствующее этому корню слагаемое в общем решении можно заменить на

$$(C_1 + C_2 n + \ldots + C_t n^{t-1})\lambda_1^n \ .$$

Для нахождения частного решения необходимо найти постоянные Ci, исходя из начальных условий.

Задание 1.

Решить комбинаторную задачу.

Варианты

1. Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?
2. В кабину лифта 9-ти этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из них может выйти на любом из 8 этажей. Сколько способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?
3. В кондитерской продаются пирожные 5-ти видов. Сколькими способами можно купить 12 пирожных?
4. Сколько различных флагов из трех полос можно составить, если имеется материал пяти цветов?
5. В зрительном зале 120 мест. Сколькими способами могут занять места в нем 120 зрителей; 80 зрителей?
6. В местком выбрано 9 человек. Нужно назначить председателя, заместителя, секретаря и бухгалтера. Сколькими способами это можно сделать?
7. Сколькими способами можно выбрать открытки для поздравления 5 лиц, если имеется 7 видов открыток?
8. Сколько способов разложить 10 различных монет по трем карманам?
9. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из 15 человек?
10. Сколько шестизначных номеров можно составить из цифр 0,1,2,3,4.5,6,7,8,9?
11. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Сколько вариантов уму нужно перебрать, что набрать нужный номер?
12. Сколько различных слов (любая последовательность букв) можно составить из букв слова КОЛОБОК, если необходимо использовать все буквы?
13. Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, другого – 5 марок. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?
14. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно составить из 14 преподавателей?
15. В первенстве участвуют 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали?
16. Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и 4 цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если ее алфавит содержит 26 букв?
17. Буквы азбуки Морзе состоят из точек и тире. Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не больше 5 символов?
18. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление 3 различных видов деталей (по одному на каждого)?
19. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках?
20. Группе из 5 сотрудников выделено 3 путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: 1)все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?
21. Сколько различных 10-ти значных чисел можно составит из цифр 0, 1 и2?
22. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
23. Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся пяти?

24. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова КАСАТЕЛЬНАЯ?
25. Сколько слов можно получить переставляя буквы слова 1)март; 2)мама?
26. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма?
27. Для того, чтобы открыть камеру хранения , используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9). Сколько различных комбинаций существует?
28. Каково число последовательностей длины 8, состоящей из 0,1 и2?
29. Для того, чтобы открыть камеру хранения , используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9). Сколько различных комбинаций существует, если цифры в комбинации не могут повторяться?
30. Участники кружка решили написать номера из цифр трех цветов: на первом месте – 3 цифры красного цвета, на втором – 2 цифры желтого цвета, на третьем – 4 зеленых. Сколько всего номеров можно написать, если красным цветом можно записать 1, 2,3,4,6, желтым – 0,2,5,7, а зеленым – 1,3,5, 6,7, 8,9?

Пример решения задания 1

Сколько домино в наборе?

Решение:

Камни домино можно рассматривать как сочетания (порядок цифр на камне не важен) по два(к) из семи (r) цифр: 0,1,2,3,4,5,6. Т.к. в наборе имеются дубли (1-1, 2-2…), то сочетания с повторениями.

Число таких сочетаний равно

$$\tilde{C}_r^k = C_{r+k-1}^k = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8*7}{2} = 28$$

Задание 2.

Найти решение рекуррентного соотношения

Варианты

вариант	Рекуррентное соотношение	Начальные условия
1	$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0;$	$a_0=1$ $a_1=2$
2	$a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$	$a_0=0$ $a_1=2$
3	$a_{n+2}-9a_n=0$	$a_0=3$ $a_1=1$
4	$a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$	$a_0=-1$ $a_1=0$
5	$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$	$a_1=1$ $a_2=-7$
6	$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$	$a_1=2$ $a_2=4$
7	$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$	$a_0=3$ $a_1=1$
8	$2a_{n+2}+5a_{n+1}+3a_n=0$	$a_1=1$ $a_2=2$
9	$4a_{n+2}+9a_{n+1}+5a_n=0$	$a_1=1$ $a_2=4$
10	$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$	$a_1=2$ $a_2=4$
11	$4a_{n+2}+7a_{n+1}+3a_n=0$	$a_1=2$ $a_2=1$
12	$a_{n+2=}-4a_n-4a_{n+1}=0$	$a_0=-2$ $a_1=1$
13	$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$	$a_1=3$ $a_2=-3$
14	$a_{n+2}=12a_{n+1}+28a_n$	$a_1=0$ $a_2=4$
15	$9a_n=-6a_{n-1}- a_{n-2}$	$a_0=2$ $a_1=2$
16	$a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$	$a_0=2$ $a_1=4$
17	$2a_{n+2}+5a_{n+1}+3a_n=0$	$a_0=1$ $a_1=-4$

18	$a_{n+1}-3a_n+2a_{n-1}=0$	$a_1=2$ $a_2=4$
19	$4a_n+9a_{n-1}+5a_{n-2}=0$	$a_0=1$ $a_1=3$
20	$4a_{n+2}+4a_{n+1}+a_n=0$	$a_1=2$ $a_2=4$
21	$12a_{n+1}+4a_{n+2}=-9a_n$	$a_0=2$ $a_1=4$
22	$6a_n+a_{n-1}=5a_{n-2}$	$a_1=1$ $a_2=-1$
23	$10a_{n+1}=9a_n+a_{n+2}$	$a_1=-2$ $a_2=5$
24	$a_{n+2}=9a_n$	$a_0=6$ $a_1=10$
25	$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$	$a_1=2$ $a_2=1$
26	$a_n=4a_{n+2}-3a_{n+1}$	$a_0=1$ $a_1=2$
27	$5a_n-12a_{n-1}+4a_{n-2}=0$	$a_1=-1$ $a_2=1$
28	$4a_{n+2}=20a_{n+1}-25a_n$	$a_0=3$ $a_1=4$
29	$a_n=16a_{n-2}$	$a_0=1$ $a_1=1$

Пример решения задания 2

Решить рекуррентное соотношение: $10a_{n-1}=-25a_n-a_{n-2}$

При начальных условиях $a_0=-1$ $a_1=2$.

Член последовательности, наиболее близкий к ее началу - a_{n-2}

Обозначим его через λ^0. Тогда характеристическое уравнение будет:

$10\lambda=-25\lambda^2-1$ или $25\lambda^2+10\lambda+1=0$.

Корни характеристического уравнения: $a_{1,2}=-1/5$.

Тогда общее решение рекуррентного соотношения имеет вид (с учетом, что у нас кратные корни):

$$a_n=(C_1+nC_2)\lambda^n=(C_1+nC_2)(-1/5)^n$$

Найдем частное решение:

Из первого начального условия (при n=0 a=-1): $C_1=-1$;

Из второго начального условия (при n=1 a=2): $2=(C_1+C_2)(-1/5)$.

Подставим в это уравнение $C_1=-1$, тогда $C_2=-9$.

Окончательный ответ (частное решение):

$$a_n=(C_1+nC_2)\lambda^n=(-1-9n)(-1/5)^n$$

Контрольные вопросы

1. Дать определения сочетаний, перестановок, размещений. Привести примеры.
2. Сформулировать правила суммы и произведения.
3. Что называется биномом Ньютона? Свойства биномиальных коэффициентов.
4. Что представляют собой соединения с повторениями. Привести примеры.

Теоретические вопросы по теме «Теория множеств»

1. Способы задания множеств
2. Булеан. Количество в нем элементов
3. Мощность множества. Мощность объединения двух множеств
4. Понятие декартова произведения. A^n
5. Понятие отношения. Область определения и область значений отношения.
6. Понятие бинарного отношения. способы задания бинарных отношений.
7. Рефлективность и антирефлексивность отношений. Пример.
8. Симметричность и антисимметричность отношений. Пример.
9. Транзитивность и антитранзитивность отношений. Пример.
10. Классы отношений.
11. Обратные отношения. Пример.
12. Композиция отношений. Пример.
13. Понятие функции. Частично и полностью определенные функции.
14. Инъективная функция. Пример.
15. Сюрьективная функция. Пример.
16. Биективная функция. Пример.
17. Обратная функция. Обратимая функция.
18. Композиция функций. Пример.
19. Основные правила комбинаторики.
20. Перестановки. Количество перестановок с повторениями и без.
21. Сочетания. Количество сочетаний.
22. Свойства биномиальных коэффициентов.
23. Размещения. Количество размещений.
24. Метод включения-исключения для решения комбинаторных задач.
25. Понятие разбиения. Пример.
26. Числа Стирлинга второго рода. Применение.
27. Числа Белла.
28. Понятие рекуррентного соотношения. Пример.
29. Производящие функции. Назначение.
30. Экспоненциальные производящие функции. Назначение.

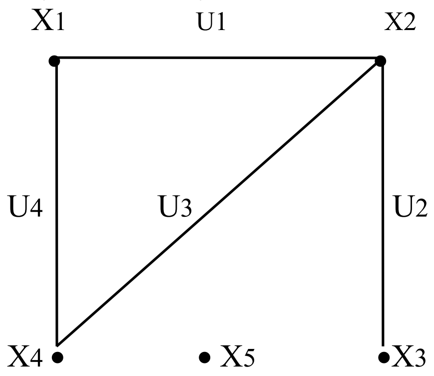
Лабораторная работа №5. Способы программирования графа

Цель: Освоить представление графа при программировании.

Тема: Способы хранения информации о графе при программировании

Теоретические сведения

ГРАФ - схема состоящая из непустого множества точек, называемых вершинами, и соединяющих их отрезков, называемых ребрами, оба конца конца которых принадлежат заданному множеству точек.



Граф G с множеством вершин X и множеством ребер U часто обозначается через G(X,U). Мы будем изучать только если X и U конечные. Ребра графа изображаются линиями простой формы (прямыми, все использованные в данном пособии линии можно заменить прямыми если перестроить графы) без самопересечения. Точки пересечения ребер графа не обязательно являются его вершинами.

Вершина графа называется изолированной если она не соединена ребром ни с одной другой. На рисунке X_5 - изолированная.

Граф O_n, состоящий из n изолированных вершин (и не содержащий других вершин) называется нуль графом или пустым графом. Каждая неизолированная вершина X графа G служит концом для одного или нескольких ребер. Все эти ребра называются инцидентными вершине X. Ребро соединяющее вершины X и Y обозначаются через (X,Y). Две вершины, соединенные ребром, называются смежными. Два ребра, имеющие общую вершину, также называются смежными. Вершина инцидентная только одному ребру, называется концевой; инцидентное ей ребро также называется концевым. При схематическом изображении систем связи, электрических схем в графе могут оказаться пары вершин, соединенных двумя или более ребрами. Такие ребра называются кратными.

Ребра (X,X),инцидентные только одной вершине, называются петлями. Иногда над термином "граф" понимают граф без петель и кратных ребер. Тогда граф, в котором есть кратные ребра называют мультиграфом, кратные ребра + петли - псевдографом.

Граф без петель и кратных ребер называется полным, если каждая пара его вершин соединена ребром. Полный граф с n вершинами обозначается U_n.

Если каждое ребро графа G ориентировано, то такой граф называется ориентированным (орграфом). Если одни ребра графа ориентированы, а другие нет, то граф называется смешанным.

Представление графов.

Пусть G-граф с n вершинами $X_1, X_2, \ldots X_n$ и m ребрами $U_1, U_2, \ldots U_m$. Его матрицей смежности называется квадратная (n * n) матрица A= (A_{ik}), где A_{ik} - число ребер, соединяющих вершины X_i и X_k. В частности, A_{ik}=0, если вершины X_i и X_k не смежны. Такая матрица, очевидно, симметрична. Для графа G без кратных ребер A_{ik}=1, если вершины i и к смежны и A_{ik} =0, если X_i и X_k не смежны. Для графа без петель все диагональные элементы матрицы смежности равны 0.

Матрицей инциденции графа G называется (n * m) матрица B=(B_{ik}), где B_{ik}=1, если вершина X_i инцидентна ребру U_k и B_{ik}=0 если X_i и U_k не инцидентны. Для графа без петель в каждом столбце матрицы инциденций точно два элемента равны 1. Если граф имеет петли, то в столбцах, соответствующих петлям стоит по одной единице, а в остальных по две.

Например :
Матрицы смежности и инцидентности имеют вид :

матрица смежности

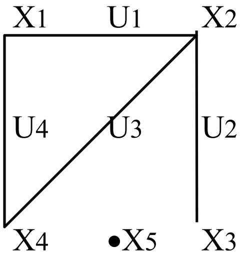
	1	2	3	4	5	
1	0	1	0	1	0	
2	1	0	1	1	0	
3	0	1	0	0	0	
4	1	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	n
					n	

вершины

матрица инцидентности

	U_1	U_2	U_3	U_4	
X_1	1	0	0	1	
X_2	1	1	1	0	
X_3	0	1	0	0	
X_4	0	0	1	1	
X_5	0	0	0	0	n
				m	

ребра



С алгоритмической точки зрения матрица инциденций является самым худшим способом представления графа :

1) он требует $m * n$ ячеек памяти, причем большинство ячеек занято нулями;

2) неудобен доступ к информации. Ответ на элементарные вопросы типа
"существует ли дуга $<X_1,X_2>$" ?
"к каким вершинам ведут ребра из X_i" ?
требует в худшем случае перебора всех столбцов матрицы, а, следовательно, m шагов.

Основным преимуществом матрицы смежности является тот факт, что за один шаг можно получить ответ на вопрос "существует ли ребро из X в Y". Недостаток - независимо от числа ребер объем занимаемой памяти составляет n^2. На практике, при небольшом числе n одну строку хранят в одном машинном слове, т.е. физически записывают в бит.

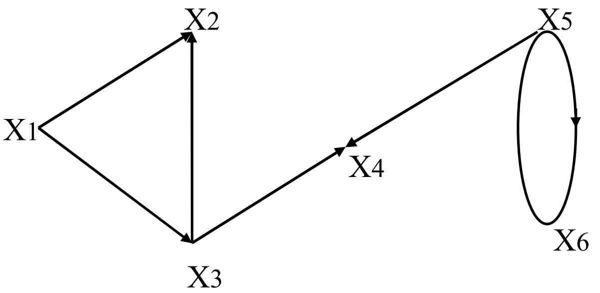
Матрица смежности ориентированных графов формируется по тем же принципам, что и для неориентированных РАФов, но с учетом направления, т.е. она уже не будет симметричной относительно главной диагонали.

Матрица инцидентности (инциденций) формируется по следующему принципу:
Матрица инциденций - $n * m$ матрица $S=(S_{ik})$, где

$$S_{ik} = \begin{cases} +1, \text{ если } X_i \text{ начало } U_k ; \\ -1, \text{ если } X_i \text{ конец } U_k ; \\ 0, \text{ если } X_i \text{ не инцидентна;} \\ 1, \text{ если } U_k \text{ - петля.} \end{cases}$$

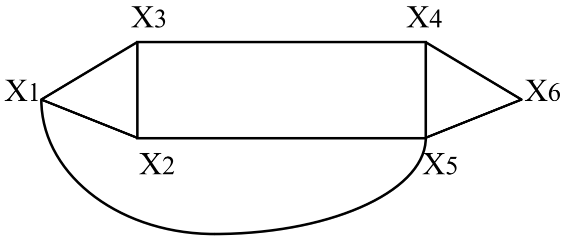
Более экономным в отношении памяти (особенно в случае неплотных графов $m << n^2$) является метод представления графа ***списком пар***, соответствующих его ребрам. Пара $<X,Y>$ соответствует дуге $<X,Y>$, если граф ориентированный и ребру $\{X,Y\}$ в случае неориентированного графа :

а) ориентированный



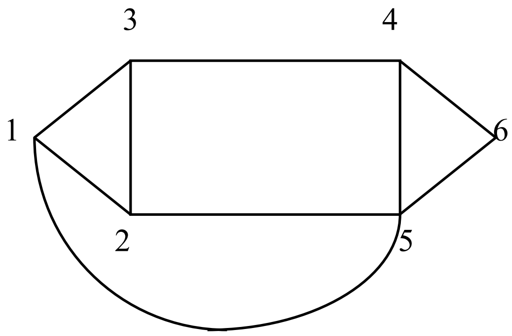
1	2
1	3
3	2
3	4
5	4
5	6
6	5

б) неориентированный

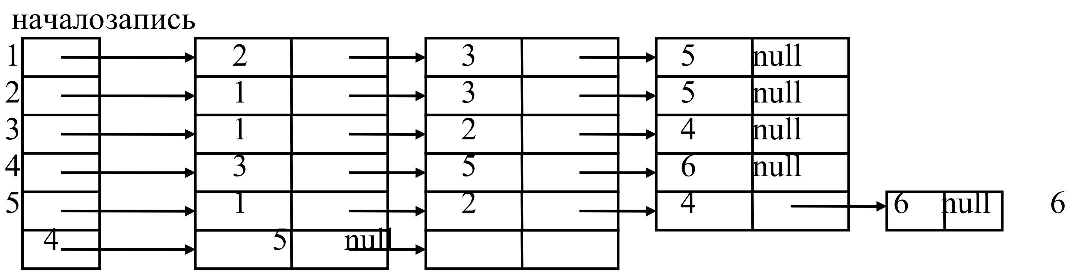


1	2
1	3
1	5
2	3
2	5
3	4
4	5
4	6
5	6

Объем памяти в этом способе составляет 2m. Лучшим решением во многих случаях оказывается структура данных, называемая <u>списком</u> <u>смежности</u> :



Он представляет собой массив, i-ый элемент которого содержит список всех вершин, смежных с i-ой.
Каждый <u>элемент</u> такого списка является записью r, содержащей вершину <u>r.строка</u> и указатель <u>r.след</u> на следующую запись в списке (r.след = null(0) для последней записи в списке)



В таком списке структура графа динамичаски модифицируется добавлением и исключением ребер. Число ячеек памяти, необходимых для представления графа в случае списков инцидентности меньше или равно m+n.

Более простой вариант реализации списка смежности: описать его матрицей n *n. Каждая строка матрицы – это список смежных вершин. Признак конца списка – ноль в элементе матрицы.

Варианты заданий к лабораторной работе № 5

1. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в матрицу инцидентности для неориентированного графа
2. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в матрицу смежности для неориентированного графа
3. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в список смежности для неориентированного графа
4. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в список пар для неориентированного графа
5. Разработать алгоритм преобразования списка пар в матрицу инцидентности для неориентированного графа
6. Разработать алгоритм преобразования списка пар в матрицу смежности для неориентированного графа
7. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в список смежности для неориентированного графа
8. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в список пар для неориентированного графа
9. Разработать алгоритм преобразования списка пар в список смежности для неориентированного графа
10. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в матрицу инцидентности для неориентированного графа
11. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в матрицу смежности для неориентированного графа
12. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в список пар для неориентированного графа
13. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в матрицу инцидентности для ориентированного графа
14. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в матрицу смежности для ориентированного графа
15. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в список смежности для ориентированного графа
16. Разработать алгоритм преобразования матрицы смежности в список пар для ориентированного графа
17. Разработать алгоритм преобразования списка пар в матрицу инцидентности для ориентированного графа

18. Разработать алгоритм преобразования списка пар в матрицу смежности для ориентированного графа
19. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в список смежности для ориентированного графа
20. Разработать алгоритм преобразования матрицы инцидентности в список пар для ориентированного графа
21. Разработать алгоритм преобразования списка пар в список смежности для ориентированного графа
22. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в матрицу инцидентности для ориентированного графа
23. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в матрицу смежности для ориентированного графа
24. Разработать алгоритм преобразования списка смежности в список пар для ориентированного графа

Контрольные вопросы

1. Дать определение графа
2. Какой граф называется ориентированным?
3. Дать определения понятиям «кратные ребра», «изолированная вершина».
4. Объяснить принцип формирования матрицы смежности и матрицы инцидентности.

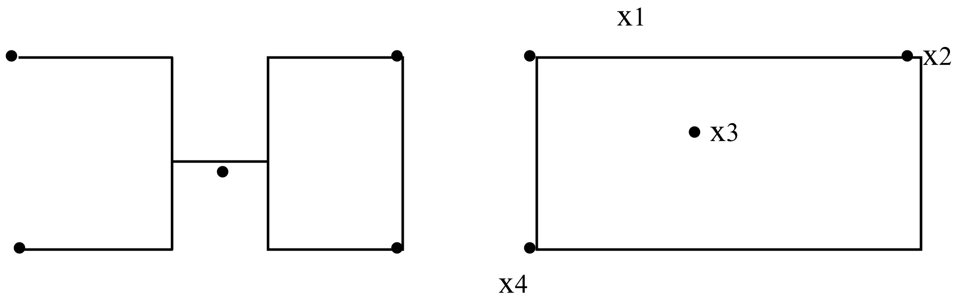
Лабораторная работа №6. Алгоритмы на графах

Цель: Освоить алгоритмы решения задач на графах

Тема: Алгоритмы обработки графов

Теоретические сведения

Две вершины xk и xn в графе называются <u>связными</u> (несвязными) , если в нем существует (не существует) цепь из xk в xn. <u>Граф</u> называется <u>связным</u>, если любые две его вершины можно соединить цепью.



Связный граф Несвязный граф

Каждый максимальный связный подграф графа G называется его <u>компонентой связности</u> (просто компонентой). Каждый граф т.о. является объединением своих попарно непересекающихся компонент. Несвязный граф имеет по крайней мере две компоненты. Одна из компонент - подграф, порожденный вершинами x1 x2 x4, другая - подграф порожденный вершиной x3.

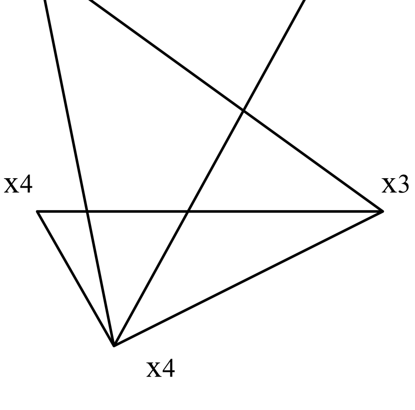
<u>Эйлеровым циклом</u> на графе называется цикл, содержащий все ребра и все вершины графа. Такие циклы существуют не на любом графе. Граф, содержащий Эйлеров цикл: Эйлеровым <u>циклом</u> на графе называется цикл, содержащий все ребра и все вершины графа. Такие циклы существуют не на любом графе. Граф, содержащий Эйлеров цикл, называется Эйлеровым.

Теорема: *Для того, чтобы граф был Эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным (соединены все вершины графа) и все его вершины имели четную степень (эйлерова линия при ее проведении входит в каждую вершину и выходит из нее одно и то же число раз).*

<u>Маршрутом</u> M_{ij}^{k} называется последовательность смежных ребер. Длиной маршрута L(M_{ij}^{k}) называется количество ребер в нем, при этом каждое ребро считается столько раз, сколько оно в нем встречается.

Например :

Длина маршрута x2 x5 x3 x4 x5 x3 x1 равна 6



$$l(M_{21}) = l(x_2 x_5 x_4 x_5 x_3 x_1) = 6$$

Путь наименьшей длины, соединяющий вершины x_i и x_j называется расстоянием между вершинами $p(x_i, x_j) = \min_k l(M_{ij}^k)$

Если xi и xj не соединены цепью (т.е. принадлежат разным компонентам), то P(xi,xj) =∞ .

Наибольшее расстояние между любыми двумя вершинами графа- его диаметр:

$$\alpha(G) = \max_{\forall i,j} P(x_i, x_j) = \max_{\forall i,j} \min_k l(M_{i,j}^k);$$

Радиус вершины x_i: $r(x_i) = \max_{\forall j} P(x_i, x_j)$;

Радиус графа- минимальный из радиусов вершин: $r(G) = \min_{\forall i} r(x_i) = \min_{\forall i} \max_{\forall j} P(x_i, x_j)$;

Вершина x_j называется достижимой на x_i, если существует путь $x_i \Rightarrow x_j$.

Вершина x_i называется контродостижимой из вершины x_j, если существует путь $x_j \Rightarrow x_i$.

Аналогично матрице, задающей граф, можно построить матрицы достижимости P и контрдостижимости Q:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, if \exists x_i \to x_j \\ 0, else \end{cases} \qquad Q_{ij} = \begin{cases} 1, if \exists x_j \to x_i \\ 0, else \end{cases}$$

Матрицы P и Q связаны операцией транспортирования: $Q = P^T$;

Гамильтонова цепь - простая цепь, проходящая через все его вершины.

Гамильтонов цикл - простой цикл, проходящий через все его вершины.

Гамильтонов граф - граф в котором есть хотя бы один гамильтонов цикл.

В общем случае задача о построении гамильтоновых цепей (циклов) (задача о коммивояжере) не решена, т.к. известно только несколько необходимых и несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов. Для небольшого числа вершин задача решается методом полного перебора.

Деревом называется связный неограф без циклов, имеющий не менее 2-х вершин (т.е. каждые 2 вершины связаны единственной простой цепью). Дерево называется максимальным (остов=скелет), если оно является частью неографа, содержащей все вершины и не входящей в другое дерево.

Пусть G - произвольный граф с n вершинами, m ребрами и p компонентами связности. Величина V = V(G) = m-n+p , V(G) ≥ 0 называется цикломатическим числом графа G. Цикломатическое число графа G равно количеству ребер, которое нужно удалить из G, не изменяя p, чтобы превратить G в граф без циклов.

Каждую вершину графа (соответственно каждое ребро) можно раскрасить в какой-либо цвет. Раскраска вершин (ребер) графа называется правильной, если никакие 2 смежные вершины (2 смежных ребра) не окрашены в один и тот же цвет. Граф G называется p-хроматическим, если он допускает правильную вершинную окраску в p цветов. Наименьшее число цветов p которыми можно раскрасить вершины графа, называется W хроматическим числом графа. Наименьшее число q = w (G) цветов достаточных для правильной раскраски ребер графа G называется хроматическим классом.

Варианты заданий к лабораторной работе №6

1. Разработать алгоритм поиска по бинарному дереву
2. Разработать алгоритм определения радиуса графа
3. Разработать алгоритм определения диаметра графа
4. Разработать алгоритм определения цикломатического числа графа
5. Разработать алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе
6. Разработать алгоритм нахождения гамильтонова цикла в графе
7. Разработать алгоритм нахождения минимальных расстояний в графе методом Флойда
8. Разработать алгоритм правильной раскраски вершин графа
9. Разработать алгоритм правильной раскраски ребер графа

10. Разработать алгоритм определения количества путей заданной длины между двумя заданными вершинами в графе
11. Разработать алгоритм определения общего количества путей между двумя заданными вершинами в графе
12. Разработать алгоритм определения наименьшего пути между двумя заданными вершинами графа
13. Разработать алгоритм определения, является ли граф деревом?
14. Разработать алгоритм определения количества компонент связности в заданном графе.
15. Разработать алгоритм обхода бинарного дерева
16. Разработать алгоритм построения минимального остова в графе методом Краскала.
17. Разработать алгоритм нахождения минимальных расстояний в графе методом Дейкстры
18. Разработать алгоритм обхода произвольного графа в ширину
19. Разработать алгоритм обхода произвольного графа в глубину
20. Разработать алгоритм формирования матрицы достижимости.
21. Разработать алгоритм формирования бинарного дерева поиска
22. Разработать алгоритм формирования минимального остова в графе методом Прима
23. Разработать алгоритм определения, является ли граф связным.
24. Разработать алгоритм вывода отсортированной информации из бинарного дерева поиска.

Контрольные вопросы

1. Какой граф называется Эйлеровым?
2. Дать определение дерева.
3. Дать определение бинарного дерева
4. Формула для определения цикломатического числа.
5. Что определяют хроматическое число и хроматический класс?
6. Какой граф называется связным? Что такое компонента связности?

Лабораторная работа №7. Теория кодирования

Цель работы: Получить базовые знания о методах кодирования информации.

Теоретические сведения

Одна из задач теории информации - отыскание наиболее эффективных методов кодирования, позволяющих передать заданную информацию с помощью минимального количества символов как при отсутствии, так и при наличии помех в канале связи.

Коды бывают равномерные и неравномерные. В равномерных кодах каждое кодовое слово одинаковой длины.

Неравномерные коды могут быть префиксными, которые не требуют разделительных знаков между кодовыми словами и обладают свойством самосинхронизации, позволяющим однозначно разделять кодовые слова в последовательности сообщений.

В компьютерах вся информация в памяти хранится в двоичном виде. Обычное для компьютера кодирование символа – ASCII-код. Каждый символ кодируется 8 битами. Это равномерный префиксный код.

1. Метод кодирования **Шеннона-Фано**

1. Расположить сообщения в порядке возрастания их вероятности
2. Разбить сообщения на 2 подмножества, так чтобы вероятности сообщений внутри каждого из подмножеств были близки друг к другу;
3. Присвоить каждому из подмножеств двоичный знак, например первому -1, а второму -0.
4. Произвести операции 2 - 3 с каждым из подмножеств.
5. Все сообщения закодированы? Да - конец, нет - 4 шаг.

Пусть из S - источника передаются сообщения A,B,C,D,E,F с вероятностями, показанными в таблице.

Сообщение источника	Вероятности P_i	Вероятности последовательн. подмножеств					Кодовые слова длины n_i
A	0.50	0.50					0
B	0.25	0.50	0.25				10
C	0.10		0.25	0.10			110
D	0.08			0.15	0.08		1110
E	0.05				0.07	0.05	11110
F	0.02					0.02	111111

2. **Метод Хаффмана**

Этот метод кодирования состоит из двух основных этапов:

1. Построение оптимального кодового дерева.
2. Построение отображения код-символ на основе построенного дерева.

Классический алгоритм Хаффмана на входе получает таблицу частот встречаемости символов в сообщении. Далее на основании этой таблицы строится дерево кодирования Хаффмана (Н-дерево).

1.Символы входного алфавита образуют список свободных узлов. Каждый лист имеет вес, который может быть равен либо вероятности, либо количеству вхождений символа в сжимаемое сообщение.

2. Выбираются два свободных узла дерева с наименьшими весами.
3. Создается их родитель с весом, равным их суммарному весу.
4. Родитель добавляется в список свободных узлов, а два его потомка удаляются из этого списка.
5. Одной дуге, выходящей из родителя, ставится в соответствие бит 1, другой — бит 0
6. Шаги, начиная со второго, повторяются до тех пор, пока в списке свободных узлов не останется только один свободный узел. Он и будет считаться корнем дерева.

Чтобы определить код для каждого из символов, входящих в сообщение, мы должны пройти путь от листа дерева, соответствующего текущему символу, до его корня, накапливая биты при перемещении по ветвям дерева (первая ветвь в пути соответствует младшему биту). Полученная таким образом последовательность битов является кодом данного символа, записанным в обратном порядке.

Оценка эффективности кодирования

Эффективность кодирования измеряется отношением энтропии на ср. число знаков кодового слова:

$$\frac{H}{n'} = \frac{1.952}{1.970} = 0.98$$

Эффективность кодирования тем выше чем ближе этот показатель к 1.

Среднее число двоичных знаков кодированного сообщения по Фано

$$n' = \sum_{1}^{m} n_i p_i$$

где n_i – количество знаков, которыми закодирован i-й символ

p_i – вероятность появления i-го символа.

Энтропия:

$$H(x) = \sum_{i=a}^{F} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Можно искать относительную эффективность – эффективность относительно, например, равномерного кодирования. В этом случае энтропия одинакова и эффективность определяется только отношением среднего числа двоичных знаков двух методов кодирования.

Требования к выполнению лабораторной работы

1) Выполнить кодирование десяти наиболее часто встречающихся символов методами Хаффмана и Шеннона-Фано.

2) Оценить относительную эффективность кодирования относительно кодирования равномерным кодом.

Варианты заданий

1) Только боль как пожар, за ударом ждешь удар.
   Или в ад, или в рай, все пути открыты, только выбирай.

2) Мы оказались тоньше хрупкого стекла, а все считали — мы из равнодушной стали.

3) Забери, умоляю, меня – слышу снова сквозь сон.
   Каждой ночью при полной луне голос слышался там.

4) Тот вечность духа заслужил, кто был так предан ремеслу
   И по просторам грёз бродил, как по тонкому стеклу.

5) Мерцают в пламени свечи фантомы людей средь кружева нот
   Их шёпот еле различим в той музыке он вновь оживёт.

6) Ночь перед боем коротка, что будет утром - знает только Бог,
   В тумане светится река, как сверху брошенный клинок.

7) А винтовку себе ты добудешь в бою, возьмешь у того, кого первым убьют!

8) Девять жизней - одна душа, несвободна и не спеша,
   Вновь навстречу я сделал шаг судьбе не зря!

9) Когда умирает чувство, гибнет целый мир,
   и не понять Вселенной, как безнадежны мы.

10) Помню неземные замки в облаках. думал жизнь наивна и легка.
были все мечты в моих руках. верил – все открыты двери.

11) И душа твоя очень боится, что не сможет она танцевать,
что не сможет она научиться в облаках безмятежно летать!

12) Назад к земле и снова в небеса здесь каждый по себе жизнь выбирает сам.

13) Когда ты смотришь в небеса в объятиях тишины,
То верь хочется, что там не может быть войны.

14) Испокон веков колокольный звон словно сердца стук твоего звучал.
Поднялась с колен и прошла сквозь плен, устояла ты, когда весь мир упал.

15) Я шёл к тебе века, твоё услышав имя, я рвался сквозь шипы, забыв про страх и боль,
И за спиной твоей я ангелом незримым был в ад пойти готов затем, чтоб быть с тобой.

16) В замке моём царит холод и мрак, его не прогнать огнём.
Будто подкрался невидимый враг и сердце пронзил моё.

17) От Арктиды до Кашмира – мы пройдем по судьбам мира
ради веры и любви.

18) Ты один теперь, ты раздавлен тяжестью потерь,
но душа твоя открыта, но зажат ещё, как прежде, меч в руке твоей.

19) Из наивных грёз ты попал сюда, где всё всерьёз,
не случилось счастье, не сбылось, мало света.

20) Если бы правда была лишь одна, не рушила б жизни сегодня война,
Но только увы истин много и вер - И скоро падёт последний барьер!

21) В море огня полыхает заря, я вызвал разлуку на бой.
Зачем ты ушла, королева моя? Скорей возвращайся домой!

22) Идут, чтобы только дойти! Истерзаны души и лица…
Без веры не будет пути. Есть вера – и чудо свершится.

23) Нет жизни без тебя, но смерти вопреки
Я призраком коснусь твоей руки.

24) Во сне хитрый демон может пройти сквозь стены,
Дыханье у спящих он умеет похищать.

Теоретические вопросы по теме «Графы»

1. Способы задания графа при программировании
2. Степень вершины графа. Однородные графы.
3. Маршрут на графе. Типы маршрутов.
4. Связный граф. Компонента связности. Мост, точка сочленения.
5. Эйлеров цикл, путь в графе. Условия существования.
6. Гамильтонов цикл, путь в графе. Условия существования.
7. Расстояние между вершинами. Диаметр графа.
8. Радиус вершины и радиус графа.
9. Хроматическое число и хроматический класс графа.
10. Грани графа. Характеристика поверхности Эйлера.
11. Дерево. Цикломатическое число графа.
12. Бинарное дерево. Двоичное дерево поиска.
13. Полный граф. Граф-дополнение.
14. Изоморфные графы. Пример.
15. Ориентированный граф. Исток. Сток.
16. Достижимость. Матрица достижимости и контрдостижимости.
17. Остов графа.
18. Четный граф. Применение.
19. Кратные ребра. Изолированные вершины. Петли.
20. Сеть. Потоки в сетях. Максимальная пропускная способность сети.
21. Основные стратегии обхода вершин графа

Рекомендуемая литература

1. Асеев Г.Г. Дискретная математика : учебник / Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э.Ситников. – К.: Кондор, 2008. – 162с.
2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – Изд. 6-е, стер. – СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2009. – 400с.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : учебное пособие для вузов / Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – СПб : Питер, 2009. – 384с.
4. Пономарев В.Ф. Дискретная математика для инженеров : учебное пособие для вузов / В.Ф. Пономарев. М. : Горячая линия-Телеком, 2009. – 320с.
5. Тюрин С.Ф. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика: учебное пособие для вузов / С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев. – М.: Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010. – 384с.
6. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М.ФИМА : МЦНМО, 2010. – 400с.

Учебное издание

Методические указания и задания к
лабораторным работам по курсу
"Дискретная математика"
(для студентов направления подготовки «Компьютерная
инженерия»)

Составитель:
Чередникова Ольга Юрьевна